

25/02/16

Definition:  $F: V \rightarrow W$  linear e Bases

von  $V, g$  Bases von  $W$  existieren

$$\text{Rang}(F) = \dim \text{Im } F = \text{Rang}[F]_g^g$$

πρόταση

Έστω  $f_1: V \rightarrow W$  γνήθης

$f_2: W \rightarrow Z$  γνήθης

τότε: i) βαθός  $(f_2 \circ f_1) \leq \min(\text{βαθός}(f_1), \text{βαθός}(f_2))$

$\leq \min(\text{βαθός}(f_1), \text{βαθός}(f_2))$

ii)  $\forall f_1$  ισομορφισμός τότε

$\text{βαθός}(f_2 \circ f_1) = \text{βαθός}(f_2)$

iii)  $\forall f_2$  ισομορφισμός τότε

$\text{βαθός}(f_1 \circ f_2) = \text{βαθός}(f_1)$

πρόταση

i) Έστω  $A \in \mathbb{F}^{n \times k}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{k \times m}$  τότε

$\text{βαθός}(A \cdot B) \leq \min(\text{βαθός}(A), \text{βαθός}(B))$

ii)  $\forall A \in \mathbb{F}^{n \times k}$  αντιστρέψιμος,  $B \in \mathbb{F}^{k \times m}$

τότε  $\text{βαθός}(A \cdot B) = \text{βαθός}(B)$

iii)  $\forall B \in \mathbb{F}^{k \times m}$  αντιστρέψιμος,  $A \in \mathbb{F}^{n \times k}$

τότε  $\text{βαθός}(A \cdot B) = \text{βαθός}(A)$

π.χ  $A \in \mathbb{F}^{4 \times 5}$ ,  $B \in \mathbb{F}^{5 \times 3}$ ,  $\text{βαθός}(A) = 4$ ,  
 $\text{βαθός}(B) = 3$

Αρα το πρόταση  $\text{βαθός}(A \cdot B) \leq \min(\text{βαθός}(A), \text{βαθός}(B)) = \min(4, 3) = 3$

Παρατήρηση: Προσοχή, για να παρα α η ο εα  
≤ του πρώτου να ποίτε και το δεύτερο

π.χ i)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Αρα  $\text{Rank}(AB) = \min(\text{Rank}(A), \text{Rank}(B))$   
 ii)  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow AB = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Αρα  $\text{Rank}(AB) = 0 < 1$  ( $1 = \text{Rank}(A)$ )

iii)  $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$   $A \in \mathbb{R}^{12 \times 4}$   $\text{Rank}(A) = 2$   
 Παρατίθενται ο  $\text{Rank}$  και  $\text{Rank}$  του  $AB$ .

Απάντηση:

Ο  $B$  είναι τετραγωνικός με  $\det B = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 7$   
 (ως συντελεστής)  $\neq 0$  στο  $\mathbb{R}$

Παρατήρηση: Αν παύσει να είναι τετραγωνικός  
 ή να είναι τετραγωνικός με αντισymmetρικό  
 ή να είναι τετραγωνικός με αντισymmetρικό  
 ή να είναι τετραγωνικός με αντισymmetρικό

Ανάλυση προτάσεων

i)  $\text{Rank}(f_2 \circ f_1) = \dim \text{Im}(f_2 \circ f_1)$ ,  $\text{Rank}(f_1) =$   
 $= \dim \text{Im} f_1$ ,  $\text{Rank}(f_2) = \dim \text{Im} f_2$

$(x \xrightarrow{f_1} y \xrightarrow{f_2} z)$  έχουμε  $\text{Im}(f_2 \circ f_1) \subseteq \text{Im} f_2$

(από αναγωγή)  
 $\begin{matrix} x & y & z \\ \downarrow f_1 & \downarrow f_2 & \\ \text{Im} f_1 & \text{Im} f_2 & \end{matrix}$   
 $\text{Rank}(f_2 \circ f_1) = \dim \text{Im}(f_2 \circ f_1) =$   
 $= \dim \text{Im}(f_2 / f_1(x)) = \dim f_2(x) -$   
 $= \dim \ker(f_2 / f_1(x)) \leq \dim f_1(x) =$   
 $= \text{Rank}(f_1)$

ii) Από  $f_1$  ισχυρίζομαι  $f_1^{-1} \rightarrow$  Άρα το

i)  $\text{Rank}(f_2 \circ f_1) \leq \text{Rank}(f_2)$  (1) έχουμε

$f_2 \circ id_W = f_2 \circ f_1 \circ f_1^{-1} = (f_2 \circ f_1) \circ f_1^{-1}$  Άρα το (i)

$\text{Rank}(f_2) \leq \text{Rank}(f_2 \circ f_1)$  (2) Άρα το (1), (2)  
 έχουμε το (i)

iii) Αναγωγικοί ομοιομορφισμοί

Αλγόριθμος

Υποδοδοί

$A \in \mathbb{F}^{n \times k}$  και  $d = \text{rank}(A)$

Ο Αλγόριθμος βρίσκει ομοιομορφ. ημοιομορφ.

$P \in \mathbb{F}^{n \times n}$ ,  $Q \in \mathbb{F}^{k \times k}$  ώστε

$$PAQ = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \left( = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right)$$

(Παρατηρούμε: Βρίσκει το  $d$  στο Βήμα 1)

Πήλη 1<sup>ο</sup>

Βρίσκει  $e = (e_1, \dots, e_k)$  και ομοιομορφ. Βάση  
του  $\mathbb{F}^k$

$g = (g_1, \dots, g_n)$  " " "

$\mathbb{F}^n$

Τότε  $f$  (αντιστοιχία)  $f: \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$  ή  $f: \mathbb{F}^k \rightarrow \mathbb{F}^n$

$$[f]_e^g = A$$

Πήλη 2<sup>ο</sup>

Εκσφ.  $\text{Ker } f \subseteq \mathbb{F}^k$

Εκσφ.  $\dim \text{Ker } f = \dim \mathbb{F}^k - \dim \text{Im } f = k - d$   
Υποδοδοί.

Βάση  $\{h_1, h_2, \dots, h_{k-d}\}$  του  $\ker F$

Γενικοποίηση σε Βάση

$\{h_1, \dots, h_{k-d}, p_1, p_2, \dots, p_d\}$  του  $\mathbb{R}^k$

Αντιστοιχία

σε διατ. Βάση  $\{p_1, p_2, \dots, p_d, h_1, \dots, h_{k-d}\}$

Βήμα 3<sup>ο</sup>

Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση

$F(p_1), \dots, F(p_d)$  του  $\mathbb{R}^n$  είναι γραμ.

ανεξάρτητα

(όπου  $\dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im} F = d$ , και νομίζουμε

το  $\operatorname{Im} F$ ). Το γενικοποίηση σε διατ. Βάση

Βάση  $Z = (F(p_1), \dots, F(p_d), w_1, \dots, w_{n-d})$  του  $\mathbb{R}^n$

Βήμα 4<sup>ο</sup>

Υποστροφή (ατομή  $P = [Id_{\mathbb{R}^n}]^Z$

$$\left( = \left( [Id_{\mathbb{R}^n}]^Z \right)^{-1} \right)$$

$$Q = [Id_{\mathbb{R}^k}]^e$$

← (επειδή οι υποστροφές  
για  $e$  καλούνται Βάση  
του  $\mathbb{R}^k$ )

$$\text{Τότε } PAQ = \begin{pmatrix} Id_d & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

## Άσκηση 2

Έστω  $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$  η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^4$  και  $g = (g_1, g_2)$

η κανονική βάση του  $\mathbb{R}^3$

### Βήμα 1

Αντιστρέφουμε ραφίλλιν

$$f: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ με } [f]_e^g = A$$

$$\text{Έχουμε } f(e_1) = 1g_1 + 3g_2 + 7g_3 = (1, 3, 7)$$

$$f(e_2) = -1g_1 + 1g_2 + 1g_3 = (-1, 1, 1)$$

$$f(e_3) = (0, -1, -2)$$

$$f(e_4) = (1, 2, 8)$$

$$\begin{aligned} f(x, y, z, w) &= f(xe_1 + ye_2 + ze_3 + we_4) \\ &= x f(e_1) + y f(e_2) + z f(e_3) + w f(e_4) \\ &= (x - y + w, 3x + y - z + 2w, 7x + y - 2z + 8w) \end{aligned}$$

### Βήμα 2

Υπολογίζουμε  $\ker f$ . Μερει τις προφανείς

$$\ker f = \{ (2, 2, 4z, 0) : z \in \mathbb{R} \}$$

(notice  $h_1 = (1, 1, 4, 0)$  βάση του

$\ker f$  και  $\dim_{\mathbb{R}} \ker f = 1$

Εκτεταίνουμε το  $h_1$  σε βάση του

$\mathbb{R}^4$  κατά τη φυσική  $[1, 1, 4, 0]$  και λαμβάνουμε

πρώτη προσθετική  $p_1 = e_2 = (0, 1, 0, 0)$

$p_2 = e_3 = (0, 0, 1, 0)$  παίρνουμε σε βάση

$p_3 = e_4 = (0, 0, 0, 1)$   $\{h_1, p_1, p_2, p_3\}$

Avda de 700 metros

$$m = (p_1, p_2, p_3, h_1) = (e_2, e_3, e_4, h_1)$$

basen von  $\mathbb{R}^4$

Buta 4

Ortsof  $P = [i \text{ dir }^3]_g^2 = \text{faza 2.3}$   
poz. jls

$$= \begin{bmatrix} -4/3 & -2/3 & 1/3 \\ -2 & -3 & 1 \\ -1/3 & -2/3 & 1/3 \end{bmatrix} \quad q = [1 \text{ dir } 4]^\circ$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Naqida (A) =}$$

Palpita (A) =

Bach's F =

Day 7

$$= \dim B^4 - \dim \ker f =$$

$$= 9 - 1 = 3$$

'Aornay 3

$A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$   $\chi_{AB} \neq \chi_{BA}$   $\Rightarrow$   $A, B$   $\chi_{AB} \neq \chi_{BA}$   
 $\chi_{AB} \neq \chi_{BA} \Rightarrow A, B$   $\chi_{AB} \neq \chi_{BA}$

Los troncos : Opifices

Αρα  $A, B$  αντιστρέφονται  $= 2$

$$= 1 \det(AB) \neq 0 \text{ if}$$

$$\det A - \det B$$

App. 2001 IF 2000 set A # 01E

για  $B \neq 0$  IF  $\Rightarrow A$  και  $B$  αντιστρέφονται  
ψ, ψ<sub>1</sub>

B τρόπος Με Βασίλειος

Γερασίου αν  $C \in IF^{n \times n}$  τότε  $C$   
αντιστρέφεται αν και μόνο αν  
 $\text{Basileos}(C) = V$

Αν  $A \in IF^{n \times n} \Rightarrow \text{Basileos}(A) = V$

Αν  $AB$  αντιστρέφεται  $V \times V \Rightarrow \text{Basileos}(AB) = V$

Αλλά  $\text{Basileos}(AB) \leq \text{Basileos}(A) \quad (3)$

Από (1), (2), (3)  $V = \text{Basileos}(A) \leq \text{Basileos}(A) \leq V$

$\Rightarrow \text{Basileos}(A) = V \Rightarrow A$  αντιστρέφεται  
όμοιος με το  $B$

#### Άσκηση 4

Αν υπάρχει  $P \in IF^{n \times n}$  αντιστρέφεται

$$B = PAP^{-1}$$

$$(\text{Αρα } B^2 = (PAP^{-1}) \cdot (PAP^{-1}) =$$

$$= P A (P^{-1}P) A P^{-1} = P A I_n A P^{-1} = P A^2 P^{-1}$$

αρα  $B^2$  όμοιος με  $A^2$

#### Πομπή

(Με σημαίνει στο  $k \geq 1$ )  $B^k = P A^k P^{-1}$  (\*\*)

Από για  $k=1$  ισχύει στο (\*)

Υποθέτουμε ότι  $k \geq 1$  και η (\*\*) ισχύει για

$L, \text{ d.o.}$   $\text{Τοξίν για } k+1$   
 $\text{Croute } B^{k+1} = B^k \cdot B = (PAP^{-1})$   
 $\text{ενοποιηθεί}$   
 $\text{inobv}$

$= PA^k P^{-1} P A P^{-1} = PA^k I_n A P^{-1} = PA^{k+1} P^{-1}$   
 $\text{αρα ισχύει}$

Ανο το  $(*)$  έχουμε  $A^k, B^k$  ομοειδή

Ασκ 5

$A \in \mathbb{F}^{n \times n}$   $\text{tr}(A) = \text{αθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου}$

a) Έστω

$A = (a_{ij}), B = (b_{ij}), \lambda \in \mathbb{F}$

$\text{tr}(A+B) = \text{tr}((a_{ij} + b_{ij})) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) =$

$= \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \text{tr}(A) + \text{tr}(B)$   $\text{οπότε}$

$\text{tr}(\lambda A) = \text{tr}((\lambda a_{ij})) = \sum_{i=1}^n (\lambda a_{ii}) =$

$= \lambda \sum_{i=1}^n a_{ii} = \lambda \cdot \text{tr}(A)$   $\text{Αρα}$   
 $\text{tr πολλαπλασιάζεται με } \lambda$

$\phi: V \rightarrow V$ ,  $e$  βάση του  $V$

$$\text{tr}(\phi) = \text{tr}([\phi]_e^e)$$

Άρα  $\text{tr}$

έστω  $e$  ή α άλλη βάση του  $V$

Ξέρουμε ότι οι πίνακες

$$[\phi]_e^e \text{ και } [\phi]_{e'}^{e'}, \text{ για οποιονδήποτε}$$

Άρα έχουν το ίδιο ίχνος

$\Rightarrow$  κατά ορισμό

Εφαρμογή

$$\text{Έστω } A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 15 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 15 \\ 9 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

για τις  $A, B$  ομοιοι;

$$\text{χουμε } \text{tr} A (\text{ίχνος}) = 12$$

$$\text{tr}(A) = 11$$

Άρα ομοιοι, πίνακες έχουν το ίδιο ίχνος

$\Rightarrow A$  όχι ομοιος με  $B$ .

Ομοιοι Πίνακες  $\Rightarrow$  ίδιο βαθύτητα, δειγματοληψία, ορίσματα και ίχνος

η.λ

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad A, B \text{ έχουν το ίδιο}$$

ίχνος αλλά δεν είναι ομοιοί

πράσι βαθύτητα  $(A) = 2$ , βαθύτητα  $(B) = 1$

$$\text{Έστω} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 1 :  $A, B$  έχουν ίδια βαθύτητα  
ορίζουσα, ίχνος ~~(Αφ' ου)~~ (Αφ' ου)

Παράδειγμα 2 :  $A, B$  όχι ομοιοί  $A \sim B$

$$B = P A P^{-1} = B I_2 \quad P^{-1} = I_2$$

αυτοίς

(F) Ομοιοί με ~~εξ~~ (Βαθύτητα το ίδιο)  
διατεταγμένες βάσεις  $e = (e_1, e_2, e_3)$  τα-  
νύσσονται του  $\mathbb{R}^3$  και

$$g_1 = (0, 0, 1), g_2 = (0, 1, 0) \\ g_3 = (1, 0, 0)$$

Υπολογίζετε τον πίνακα  $[0]_g^e =$

$$= \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

$$\phi(g_1) = \phi((1, 0, 1)) = (1, 1, 0) = e_1 + e_2 + 0e_3$$

$$\phi(g_2) = \phi((1, 0, 1)) = (1, 0, 1) = 1e_1 + 0e_2 + 1e_3$$

$$\phi(g_3) = \phi((1, 0, 0)) = (0, 1, 1) = 0e_1 + 1e_2 + 1e_3$$

$$[\phi]_g^e = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \det [\phi]_g^e = -2$$

⇓  
Βαθμίδα  $[\phi]_g^e = 3$

$$\text{Αρ. Βαθμίδα}(\phi) = \text{Βαθμίδα}[\phi]_g^e = 3$$

$$\begin{aligned} \text{Λατ.} &\rightarrow \text{ορίζουσα}(\phi) = \det [\phi]_g^e = -2 \\ &\rightarrow \text{tr}(\phi) = -(\sqrt{\det [\phi]_g^e}) = 2 \end{aligned}$$

Για να σωσω

$$\det [\phi]_e^e \leftarrow \text{ίδιο Βαθμ. πάνω και κάτω}$$

$$\text{Λύνω για } [\phi]_e^e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{tr } \phi = \text{tr}([\phi]_e^e) = 0$$

$$\det \phi = \det([\phi]_e^e) = 2$$

$$\text{Βαθμίδα}(\phi) = \text{Βαθμίδα}([\phi]_e^e) = 3$$